

# Condensed Mathematics and Complex Geometry (under construction)

荒井 勇人      今村 悠希      軽部 友裕      水野 雄貴      吉田 智輝

2025 年 9 月 12 日

## 概要

このノートは [\[CS22\]](#) のセミナーのまとめである。

## 目次

|     |                                |    |
|-----|--------------------------------|----|
| 0   | 導入                             | 2  |
| 1   | 予備知識                           | 3  |
| 1.1 | Stone 空間と副有限空間                 | 3  |
| 1.2 | Extremally disconnected spaces | 8  |
| 2   | 凝縮集合                           | 13 |
| 2.1 | Condensed 集合の定義                | 13 |
| 2.2 | CondSet の部分圏                   | 21 |
| 2.3 | Condensed Abelian Groups       | 25 |
| 3   | リキッド凝縮アーベル群                    | 26 |
| 3.1 | リキッド凝縮ベクトル空間                   | 26 |
| 3.2 | リキッドテンソル積の計算例                  | 27 |
| 3.3 | 正則関数のなす層の構成                    | 27 |
| A   | 圏論の基礎                          | 28 |
| A.1 | 極限, 随伴                         | 28 |
| A.2 | アーベル圏                          | 30 |
| A.3 | Grothendieck 位相と景              | 30 |

## 0 導入

凝縮数学の基本的文献は Scholze らによるレクチャーノート

- [Sch19] Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics (all results joint with Dustin Clausen)*, 2019.
- [Sch20] Scholze. *Lectures on Analytic Geometry (all results joint with Dustin Clausen)*, 2020.
- [CS22] Clausen and Scholze. *Condensed Mathematics and Complex Geometry*, 2022.

であるが、出版されているものではなく読みにくい。Scholze の学生による修士論文である [Ásg21], [Mai21] も参考になる。

### 記法・約束

- 集合論的な大きさの問題は無視することにする。
- 位相空間の clopen 集合とは、開かつ閉な部分集合のことをいう。位相空間  $X$  の clopen 集合全体の集合を  $\text{clop}(X)$  で表す。

# 1 予備知識

凝縮数学の基礎となる位相空間論について述べる。[Nes17], [Lin23], [Lan22]などを参考にした。

## 1.1 Stone 空間と副有限空間

位相空間と連続写像のなす圏を  $\mathbf{Top}$  とし、コンパクト Hausdorff 空間のなす  $\mathbf{Top}$  の充満部分圏を  $\mathbf{CHaus}$  で表す。次の命題は基本的な位相空間論である。

**命題 1.1.** 位相空間の圏  $\mathbf{Top}$  は完備かつ余完備で、忘却関手  $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  は極限と余極限を保つ。つまり  $\mathbf{Top}$  の極限や余極限は、集合としての極限や余極限に適切な位相をいれたものになる。

連続写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して  $\mathbf{Top}$  における pullback

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\ \text{pr}_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

をとり  $\pi_1 = f \circ \text{pr}_1$ ,  $\pi_2 = f \circ \text{pr}_2$  とおく。

**命題 1.2.** 位相空間の間の連続写像  $f: X \rightarrow Y$  について、 $X$  がコンパクトで  $Y$  が Hausdorff であるとする。このとき次が成り立つ。

- (1)  $f$  は閉写像である。
- (2)  $f$  が全単射ならば、 $f$  は同相である。
- (3)  $f$  が全射ならば、

$$X \times_Y X \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} X \xrightarrow{f} Y$$

は  $\mathbf{Top}$  の coequalizer である。

*Proof.* (1) コンパクト空間の閉集合がコンパクトであることとコンパクト性が連続写像で保たれること、Hausdorff 空間のコンパクト集合が閉集合になることから従う。

(2) 全単射な連続閉写像が同相であることからわかる。

(3)  $\mathbf{Top}$  における  $\pi_1, \pi_2$  の coequalizer を

$$X \times_Y X \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} X \xrightarrow{p} C \quad (\spadesuit)$$

とする。このとき coequalizer の普遍性から

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y' \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & Y \end{array}$$

となる連続写像  $g: Y' \rightarrow Y$  が存在する. この  $g$  が同相写像であることを示せばよい. 図式 (♠) は  $\mathbf{Set}$  での coequalizer でもあり,  $Y'$  の台集合は

$$X/\sim, \quad \text{where } x \sim x' \iff p(x) = p(x')$$

である. これより  $g$  が全単射になることがわかる. また  $p$  は全射だから  $X$  がコンパクトであることより  $Y'$  もコンパクト. したがって  $Y$  が Hausdorff だから, (2) より  $g$  は同相である.  $\square$

**命題 1.3.** コンパクト Hausdorff 空間の間の連続写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して,

$$f \text{ はエピ射} \iff f \text{ は全射.}$$

*Proof.*  $f$  が全射ならばエピ射になることは明らか.  $f$  がエピ射であるとする.  $f(X) \neq Y$  であると仮定し,  $y \in Y \setminus f(X)$  をとる. 今  $f$  は閉写像だから  $f(X) \subseteq Y$  は閉集合で,  $Y$  が Hausdorff だから  $\{y\} \subseteq Y$  も閉集合である.  $Y$  が正規だから Urysohn の補題により, 連続写像  $g: Y \rightarrow [0, 1]$  であって  $g(f(X)) = \{0\}$  かつ  $g(y) = 1$  となるものが存在する.  $0$  での定数写像を  $h = 0: Y \rightarrow [0, 1]$  とすれば  $g \circ f = h \circ f = 0$  が成り立つが, 明らかに  $g \neq h$  であり  $f$  がエピ射であることに矛盾する. したがって  $f(X) = Y$  が成り立ち,  $f$  は全射である.  $\square$

**命題 1.4.** 包含関手  $\mathbf{CHaus} \hookrightarrow \mathbf{Top}$  は左随伴  $\beta: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CHaus}$  を持つ. この左随伴  $\beta$  を Stone-Čech コンパクト化と呼ぶ. 位相空間  $X$  の単位射を  $\eta_X: X \rightarrow \beta X$  とすると, 任意のコンパクト Hausdorff 空間  $Y$  と連続写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \beta X \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & Y \end{array}$$

を可換にする連続写像  $g: \beta X \rightarrow Y$  が一意に存在する.

まとめると次がいえる.

**命題 1.5.** コンパクト Hausdorff 空間の圏  $\mathbf{CHaus}$  について次が成り立つ.

- (1)  $\mathbf{CHaus}$  は完備かつ余完備である.
- (2)  $\mathbf{CHaus}$  は  $\mathbf{Top}$  の極限で閉じる.
- (3)  $\mathbf{CHaus}$  の同型射は全単射と同値である.
- (4)  $\mathbf{CHaus}$  のエピ射は全射と同値である.
- (5)  $\mathbf{CHaus}$  の全射  $p: S \rightarrow T$  に対して,  $\mathbf{Top}$  での coequalizer

$$S \times_T S \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} S \xrightarrow{p} T$$

は  $\mathbf{CHaus}$  の coequalizer である.

*Proof.* (1) と (2) について, 命題 1.4 より  $\mathbf{CHaus}$  は  $\mathbf{Top}$  の反映的部分圏になっていることから従う. (3) は命題 1.2 より, (4) は命題 1.3 よりわかる.

(5) 命題 1.2 より図式

$$S \times_T S \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} S \xrightarrow{p} T \quad (\heartsuit)$$

は  $\mathbf{Top}$  での coequalizer である. ここで,  $S \times_T S$  は  $\mathbf{Top}$  での pullback

$$\begin{array}{ccc} S \times_T S & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \Delta \\ X \times X & \xrightarrow{p \times p} & Y \times Y \end{array}$$

になっている.  $Y$  が Hausdorff であることから  $\Delta(Y)$  は閉集合であり, よって  $S \times_T S = (p \times p)^{-1}(\Delta(Y))$  も閉集合である.  $X \times X$  がコンパクト Hausdorff だからその閉集合である  $S \times_T S$  もコンパクト Hausdorff になる (あるいは (2) より CHaus が  $\mathbf{Top}$  の極限で閉じていることからわかる). よって図式 (♥) は CHaus での coequalizer にもなっている.  $\square$

さて, Stone 空間および副有限空間を導入しよう.

**定義 1.6.** 位相空間  $X$  が**完全不連結** (*totally disconnected*) であるとは, その連結な部分空間が常に一点集合になるときをいう. これは  $X$  のすべての連結成分が一点集合であることと同値である. ここで, 空集合は連結ではないとする. 完全不連結な位相空間からなる  $\mathbf{Top}$  の充満部分圏を TD で表す.

**補題 1.7.** 完全不連結な位相空間について次が成り立つ.

- (1) 完全不連結な位相空間の部分空間はまた完全不連結である.
- (2) 完全不連結な位相空間の直積はまた完全不連結である.

特に TD は  $\mathbf{Top}$  の極限で閉じる.

*Proof.* (1) 完全不連結な位相空間  $X$  とその部分空間  $Y$  をとる.  $C$  を  $Y$  の連結な部分集合とすると, これは  $X$  の連結な部分集合にもなるから  $C$  は一点集合である.

(2) 完全不連結な位相空間の族  $\{X_\lambda\}_\lambda$  について, その直積空間を  $X = \prod_\lambda X_\lambda$  とおく. 自然な射影を  $\pi_\lambda: X \rightarrow X_\lambda$  とする.  $C$  を  $X$  の連結な部分集合とすると, 各  $\lambda$  について  $\pi_\lambda(C)$  は  $X_\lambda$  の連結な部分集合であるから,  $\pi_\lambda(C)$  は一点集合  $\{x_\lambda\}$  となる. このとき  $C = \{(x_\lambda)_\lambda\}$  となるから  $X$  は完全不連結である.  $\square$

**例 1.8.** 離散空間や Cantor 集合は完全不連結である. 有理数環  $\mathbb{Q}$  や  $p$  進整数環  $\mathbb{Z}_p$  も完全不連結である.

**定義 1.9.** 位相空間  $X$  が**ゼロ次元** (*zero-dimensional*) であるとは,  $X$  が clopen な集合<sup>\*1</sup>からなる開基を持つときをいう.

位相空間  $X$  の点  $x \in X$  に対して,  $x$  の属する連結成分を  $C(x)$  と表す. これは  $x$  を含む最大の連結集合である. また  $x$  の clopen な近傍全体の共通部分を

$$Q(x) = \bigcap_{W \subseteq X : \text{clopen}, x \in W} W$$

とおく<sup>\*2</sup>. 閉集合の共通部分であるから  $Q(x) \subseteq X$  は閉集合である.

<sup>\*1</sup> 位相空間の部分集合が開かつ閉であるとき, clopen であるという.

<sup>\*2</sup>  $Q(x)$  は  $x$  の quasi-component と呼ばれる.

**補題 1.10.** コンパクト Hausdorff 空間  $X$  とその点  $x \in X$  について次が成り立つ.

- (1) 開集合  $U$  に対して,  $Q(x) \subseteq U$  ならば,  $x$  のある clopen な近傍  $W$  が存在して  $W \subseteq U$  となる.
- (2)  $C(x) = Q(x)$  が成り立つ.

*Proof.* (1) 開集合  $U$  が  $Q(x) \subseteq U$  をみたすとき,  $\{W^c \mid W \subseteq X : \text{clopen}, x \in W\}$  は閉集合  $U^c$  の開被覆である.  $X$  がコンパクトだから  $U^c$  もコンパクトで, よって有限個の  $x$  の clopen な近傍  $W_1, \dots, W_n \subseteq X$  が存在して

$$U^c \subseteq W_1^c \cup \dots \cup W_n^c = (W_1 \cap \dots \cap W_n)^c$$

となるものが存在する.  $W = W_1 \cap \dots \cap W_n$  とおけば,  $W$  は  $x$  の clopen な近傍であり,  $W \subseteq U$  をみたす.

(2) まず  $W \subseteq X$  を  $x$  の clopen な近傍とすると,  $W \cap C(x)$  は空ではない  $C(x)$  の clopen な部分集合となる. よって  $C(x)$  の連結性より  $W \cap C(x) = C(x)$ , つまり  $C(x) \subseteq W$  となる. このことから  $C(x) \subseteq Q(x)$  が成り立つ.

次に  $Q(x)$  が連結であることを示そう. 閉集合  $A, B \subseteq Q(x)$  で

$$A \cup B = Q(x), \quad A \cap B = \emptyset$$

をみたすものをとる. ここで  $x \in A$  であるとしてよい.  $Q(x)$  は  $X$  の閉集合であるから  $A, B$  も  $X$  の閉集合である. いま  $X$  は正規だから, 開集合  $U, V \subseteq X$  で

$$U \cap V = \emptyset, \quad A \subseteq U, \quad B \subseteq V$$

となるものが存在する. このとき  $Q(x) = A \cup B \subseteq U \cup V$  だから (1) より,  $x$  のある clopen な近傍  $W$  で  $W \subseteq U \cup V$  となるものが存在する. このとき開集合  $W \cap U$  を考えると,  $W \cap U = W \cap V^c$  よりこれは閉集合でもあり,  $W \cap U$  は  $x$  の clopen な近傍になる. よって  $Q(x) \subseteq W \cap U$  であり,  $B \subseteq Q(x) \cap V \subseteq (W \cap U) \cap V = \emptyset$  より  $B = \emptyset$  が従う. 以上より  $Q(x)$  は連結.  $C(x)$  は  $x$  を含む最大の連結集合だから  $C(x) = Q(x)$  がわかる.  $\square$

**定理 1.11.** コンパクト Hausdorff 空間  $X$  に対して,

$$X \text{ は完全不連結} \iff X \text{ はゼロ次元である}$$

が成り立つ.

*Proof.* ( $\Leftarrow$ )<sup>\*3</sup>:  $C \subseteq X$  を空でない連結集合とする.  $C$  が異なる二元  $x, y \in C$  を持つと仮定すると,  $X$  が Hausdorff (よって  $T_1$ ) であることより開集合  $U \subseteq X$  で  $x \in U$  かつ  $y \notin U$  となるものが存在する. ここで  $X$  は clopen 集合からなる開基をもつから  $U$  は clopen であるとしてよい. このとき  $C \cap U$  は連結集合  $C$  の clopen 集合となり,  $C \cap U = \emptyset$  または  $C \cap U = C$  のいずれかが成り立つ. しかし  $x \in U$  より  $C \cap U \neq \emptyset$  で,  $y \notin U$  より  $C \cap U \neq C$  となり, 矛盾. したがってすべての連結集合  $C$  は一元集合であり,  $X$  は完全不連結である.

( $\Rightarrow$ ):  $X$  が完全不連結のとき, 補題 1.10 (2) より  $Q(x) = C(x) = \{x\}$  となる. 任意の  $x \in X$  の開近傍  $U$  に対して,  $Q(x) = \{x\} \subseteq U$  となるから補題 1.10 (1) より,  $W \subseteq U$  となる  $x$  の clopen な近傍  $W$  が存在する. よって  $X$  は  $\text{clop}(X)$  を開基にもつ.  $\square$

<sup>\*3</sup> この証明は  $T_1$  性があれば十分である.

**定義 1.12.** 完全不連結なコンパクト Hausdorff 空間  $X$  のことを *Stone 空間* (*Stone space*) と呼ぶ. Stone 空間からなる CHaus の充満部分圏を Stone で表す.

**系 1.13.** Stone 空間の圏 Stone は Top の極限で閉じる.

*Proof.* 命題 1.5 と補題 1.7 より CHaus と TD が Top の極限で閉じることから従う.  $\square$

もう少し一般に次も成り立つ.

**定義 1.14.** 位相空間  $X$  が *局所コンパクト* (*locally compact*) であるとは, 任意の  $x \in X$  とその開近傍  $U \subseteq X$  に対し,  $x$  の開近傍  $V$  であって閉包  $\bar{V}$  がコンパクトかつ  $\bar{V} \subseteq U$  となるものが存在するときをいう.

**系 1.15.** 局所コンパクト Hausdorff 空間  $X$  に対して,

$$X \text{ は完全不連結} \iff X \text{ がコンパクト開集合からなる開基を持つ}$$

が成り立つ.

*Proof.*  $(\Leftarrow)$ : 定理 1.11 での証明と同様にして証明できる.

$(\Rightarrow)$ : 任意の  $x \in X$  の開近傍  $U$  に対して,  $X$  が locally compact であることから,  $x$  の開近傍  $V$  であって閉包  $\bar{V}$  がコンパクトかつ  $\bar{V} \subseteq U$  となるものがとれる. 部分空間  $\bar{V}$  は完全不連結なコンパクト Hausdorff 空間であるから, 定理 1.11 より  $x \in W \subseteq \bar{V}$  となる  $\bar{V}$  の clopen 集合がとれる.  $W$  はコンパクト空間の開集合だからコンパクトで, 開部分空間  $V$  の開集合だから  $X$  の開集合でもある. よって  $W \subseteq X$  は  $x \in W \subseteq U$  となるコンパクト開集合である.  $\square$

**定義 1.16.** 完全不連結な局所コンパクト Hausdorff 空間  $X$  のことを *局所 Stone 空間* (*locally Stone space*) と呼ぶ.

Stone 空間は同値な別の言い換えも持つ.

**定義 1.17.** 位相空間  $X$  が *副有限空間* (*profinite space*) であるとは, 位相空間の圏 Top において有限離散空間の cofiltered limit で表せるときをいう. 副有限空間からなる Top の充満部分圏を Prof で表す.

**命題 1.18.** 位相空間  $X$  に対して,

$$X \text{ は副有限空間である} \iff X \text{ は Stone 空間である}$$

が成り立つ. すなわち  $\text{Prof} = \text{Stone}$  である.

*Proof.*  $(\Rightarrow)$ : 有限離散空間は Stone 空間であり, Stone が Top の極限で閉じることから従う.

$(\Leftarrow)$ : Stone 空間  $X$  に対して,

$$\mathcal{I} = \{I = \{U_i\}_i : X \text{ の disjoint な有限被覆} \mid U_i \text{ は空でない clopen 集合}\}$$

とおく.  $I = \{U_i\}_i, J = \{U_j\}_j \in \mathcal{I}$  に対して

$$I \leq J \iff \text{各 } i \text{ についてある } j \text{ が存在して } U_i \subseteq U_j \text{ となる}$$

によって順序を定めたとき、 $\mathcal{I}$  は余有向な順序集合になる。各  $I \in \mathcal{I}$  は有限離散集合  $F(I)$  とみなし、 $I \leq J$  のとき disjointness より各  $i$  について  $U_i \subseteq U_j$  となる  $j$  は一意であることから連続写像  $F(I) \rightarrow F(J)$  を得る。これら対応を考えることで関手

$$F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Top}$$

が得られる。各  $I = \{U_i\}_i \in \mathcal{I}$  に対し写像  $f_I: X \rightarrow F(I)$  を、 $x \in X$  に対し  $x \in U_i$  となる一意な  $i$  をとって  $f_I(x) = i$  と定義すると、これは連続である。射の族  $\{f_I\}_{I \in \mathcal{I}}$  は  $I$  について自然で  $F$  上の cone になるから、 $\mathbf{Top}$  において

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \lim F \\ & \searrow f_I & \downarrow \\ & & F(I) \end{array}$$

を可換にする連続写像  $f: X \rightarrow \lim F$  が一意に存在する。CHaus は  $\mathbf{Top}$  の極限で閉じるから  $\lim F$  はコンパクト Hausdorff である。よって  $f$  が同相であることを示すには、 $f$  が全単射であることを確認すればよい。

- $f$  が全射であること：極限  $\lim F$  の台集合は

$$\left\{ (V_I)_I \in \prod_{I \in \mathcal{I}} I \mid I \leq J \text{ ならば } V_I \subseteq V_J \right\}$$

である。任意の元  $(V_I)_I \in \lim F$  をとる。コンパクト空間  $X$  の閉集合族  $\{V_I\}_I$  を考えると、これは有限交差性を持つことがわかるから  $\bigcap_I V_I \neq \emptyset$  となる。このとき  $x \in \bigcap_I V_I$  をとれば  $f(x) = (V_I)_I$  がわかる。

- $f$  が単射であること： $x, y \in X$  に対し  $x \neq y$  であるとする。補題 1.10 と  $X$  が完全不連結であることから、 $Q(x) = C(x) = \{x\}$  である。よって  $y \notin Q(x)$  だから、 $x \in W$  かつ  $y \notin W$  であるような clopen 集合  $W \subseteq X$  が存在する。このとき空でない clopen 集合からなる disjoint な  $X$  の被覆  $I = \{W, X \setminus W\}$  を考えれば、 $f_I(x) \neq f_I(y)$  となる。よって  $f(x) \neq f(y)$  である。□

■ 系 1.19. 副有限空間の圏  $\mathbf{Prof}$  は  $\mathbf{Top}$  の極限で閉じる。

*Proof.*  $\mathbf{Prof} = \mathbf{Stone}$  と系 1.13 よりわかる。□

例 1.20. 以下は副有限空間である：

- (1)  $\mathbb{Z}_p$
- (2)  $\mathbb{N} \cup \infty$

## 1.2 Extremally disconnected spaces

一般の圏における射影的对象の概念を導入する。

■ 定義 1.21. 圏  $\mathcal{C}$  の対象  $P$  が射影的 (projective) であるとは、関手  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  がエピ射を保つときをいう。

例えば集合の圏  $\mathbf{Set}$  においてはすべての対象が射影的である。

**補題 1.22.** 圏  $\mathcal{C}$  の対象  $P$  に対して、次は同値である：

- (1)  $P$  は射影的である.
- (2) 任意の  $\mathcal{C}$  の射  $\phi: P \rightarrow Z$  とエピ射  $f: Y \twoheadrightarrow Z$  に対して、

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \psi \nearrow & \downarrow f & \\ P & \xrightarrow{\phi} & Z \end{array}$$

を可換にする射  $\psi: P \rightarrow Y$  が存在する.

*Proof.* Set のエピ射がちょうど全射であることからわかる. □

**補題 1.23.** 圏  $\mathcal{C}$  が pullback を持つとき、対象  $P$  に対して次は同値である：

- (1)  $P$  は射影的である.
- (2) 任意の  $\mathcal{C}$  のエピ射  $f: Y \twoheadrightarrow P$  は section を持つ. つまり  $s \circ f = \text{id}_P$  となる射  $s: P \rightarrow Y$  が存在する.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2): 明らか.

(2)  $\Rightarrow$  (1):  $\mathcal{C}$  の射  $\phi: P \rightarrow Z$  とエピ射  $f: Y \twoheadrightarrow Z$  をとる. 圏  $\mathcal{C}$  での pullback

$$\begin{array}{ccc} P \times_Z Y & \xrightarrow{\phi'} & Y \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{\phi} & Z \end{array}$$

を考えると、 $f$  がエピ射より  $f'$  もエピ射である. よって  $f': P \times_Z Y \twoheadrightarrow P$  は section  $s: P \rightarrow P \times_Z Y$  を持つ. このとき  $\psi = \phi' \circ s$  とおけば、 $f \circ \psi = \phi$  となる. □

**命題 1.24.** 関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  と  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  が随伴  $F \dashv G$  をなすとする. 右随伴  $G$  がエピ射を保つとき、左随伴  $F$  は射影的对象を保つ.

*Proof.* 対象  $P \in \mathcal{C}$  に対して、随伴  $F \dashv G$  より

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(P), -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, G(-))$$

が成り立つ. よって  $P$  が射影的のとき  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, G(-))$  がエピ射を保つから、 $F(P)$  は射影的である. □

**定義 1.25.** 圏  $\mathcal{C}$  が十分射影的对象を持つとは、任意の対象  $X$  に対して射影的对象  $P$  からのエピ射  $P \twoheadrightarrow X$  が存在するときをいう.

これから導入する位相空間は、 $\text{CHaus}$  での射影的对象を特徴づけるものである.

**定義 1.26.** 位相空間  $X$  が *extremally disconnected* であるとは、任意の開集合  $U \subseteq X$  についてその閉包  $\overline{U}$  もまた開集合になるときをいう。

**命題 1.27.** Hausdorff 空間  $X$  に対して、 $X$  が *extremally disconnected* ならば完全不連結である。

*Proof.* 元  $x \in X$  に対して  $x$  を含む連結成分を  $C(x)$  とする。  $x$  と異なる元  $y \in X$  を取るとき、 $X$  は Hausdorff であるから、 $x \in U$  かつ  $y \notin \overline{U}$  となる開集合  $U \subseteq X$  が存在する。  $X$  は *extremally disconnected* より  $\overline{U}$  は clopen となる。 よって  $\overline{U} \cap C(x)$  は連結集合  $C(x)$  の clopen な集合で、 $x \in \overline{U} \cap C(x)$  より空ではないから、 $\overline{U} \cap C(x) = C(x)$  となる。 つまり  $C(x) \subseteq \overline{U}$  が成り立つ。  $y \notin \overline{U}$  であったから  $y \notin C(x)$  である。 したがって  $C(x) = \{x\}$  となり、 $X$  は完全不連結である。  $\square$

コンパクト Hausdorff かつ *extremally disconnected* な位相空間のなす Top の充満部分圏を Extr で表す。 命題 1.27 より Extr は Stone の充満部分圏になる。

**補題 1.28.**  $X$  を *extremally disconnected* な位相空間とする。  $X$  の開集合  $U, V \subseteq X$  に対して、 $U \cap V = \emptyset$  ならば  $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$  である。

*Proof.*  $U \cap V = \emptyset$  より  $U \subseteq X \setminus V$  である。  $X \setminus V$  は閉集合だから  $\overline{U} \subseteq X \setminus V$  となり、 $\overline{U} \cap V = \emptyset$  がわかる。  $X$  は *extremally disconnected* だから  $\overline{U}$  は再び開集合であり、議論を繰り返すことで  $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$  がわかる。  $\square$

**補題 1.29.** Top の全射連続写像  $f: Y \rightarrow Z$  について、条件

(\*)  $Y$  の真なるすべての閉集合  $E$  に対して  $f(E) \neq Z$  となる

を満たすとする。 このとき開集合  $U \subseteq Y$  に対して  $f(U) \subseteq \overline{Z \setminus f(Y \setminus U)}$  が成り立つ。

*Proof.*  $U = \emptyset$  の場合は明らかだから  $U \neq \emptyset$  とする。 元  $a \in f(U)$  をとるとき、 $a \in \overline{Z \setminus f(Y \setminus U)}$  を示すには、 $a$  の任意の開近傍  $V \subseteq Z$  について  $V \cap (Z \setminus f(Y \setminus U)) \neq \emptyset$  となることを示せばよい。  $W = U \cap f^{-1}(V) \subseteq Y$  とおくと、これは空でない開集合であるから、条件 (\*) より  $f(Y \setminus W) \neq Z$  となる。 したがって元  $z \in Z \setminus f(Y \setminus W)$  が取れる。 まず  $f$  の全射性から  $f(y) = z$  となる  $y \in Y$  が存在するが、 $z \notin f(Y \setminus W)$  より  $y \in W = U \cap f^{-1}(V)$  となる。 よって  $f(y) = z \in V$  がわかる。 次に  $W \subseteq U$  であることから  $Z \setminus f(Y \setminus W) \subseteq Z \setminus f(Y \setminus U)$  がわかるから、 $z \in Z \setminus f(Y \setminus U)$  である。 以上より  $V \cap (Z \setminus f(Y \setminus U)) \neq \emptyset$  となることが示せた。  $\square$

**補題 1.30.** CHaus の全射連続写像  $f: Y \rightarrow Z$  について、条件

(\*)  $Y$  の真なるすべての閉集合  $E$  に対して  $f(E) \neq Z$  となる

を満たすとする。  $Z$  が *extremally disconnected* であるとき、 $f$  は同相である。

*Proof.*  $f$  が単射であることを示せば十分である。 元  $x, y \in Y$  について  $x \neq y$  であるとする。  $Y$  が Hausdorff であるから、開集合  $U, V \subseteq Y$  であって  $x \in U$  かつ  $y \in V$  かつ  $U \cap V = \emptyset$  となるものが存在する。 ここで  $f$

が閉写像であることより  $Z \setminus f(Y \setminus U), Z \setminus f(Y \setminus V)$  は開集合であり,

$$\begin{aligned} Z \setminus f(Y \setminus U) \cap Z \setminus f(Y \setminus V) &= Z \setminus (f(Y \setminus U) \cup f(Y \setminus V)) \\ &= Z \setminus f((Y \setminus U) \cup (Y \setminus V)) \\ &= Z \setminus f(Y) = \emptyset \end{aligned}$$

をみたま。よって補題 1.28 より

$$\overline{Z \setminus f(Y \setminus U)} \cap \overline{Z \setminus f(Y \setminus V)} = \emptyset$$

となる。特に補題 1.29 より  $f(U) \cap f(V) = \emptyset$  がわかる。したがって  $f(x) \neq f(y)$  であり,  $f$  は単射である。□

コンパクト Hausdorff 空間の部分集合について, 閉であることとコンパクトであることは同値であったことを思い出そう。

**補題 1.31.** CHaus の全射連続写像  $f: Y \rightarrow Z$  に対して, コンパクト集合  $K \subseteq Y$  であって  $f(K) = Z$  かつ

(\*)  $K$  の真なるすべての閉集合  $E$  に対して  $f(E) \neq Z$  となる

を満たすものが存在する。

*Proof.* Zorn の補題を用いて証明する。

$$\Sigma := \{E \subseteq Y \mid E \text{ はコンパクトかつ } f(E) = Z \text{ をみたす}\}$$

とおき, 包含関係によって  $\Sigma$  を順序集合とみなす。  $X \in \Sigma$  より  $\Sigma \neq \emptyset$  である。  $\Sigma$  の全順序部分集合  $\{E_\lambda\}_\lambda$  をとるとき, これは閉集合の族であるから  $\bigcap_\lambda E_\lambda$  も閉集合で, よって  $Y$  のコンパクト集合である。元  $z \in Z$  を任意にとると,  $f(E_\lambda) = Z$  より  $E_\lambda \cap f^{-1}(z)$  は空でない閉集合である。  $\{E_\lambda\}_\lambda$  が全順序集合であることから,  $\{E_\lambda \cap f^{-1}(z)\}_\lambda$  は有限交差性を持つことがわかる。よって  $Y$  がコンパクトより  $\bigcap_\lambda (E_\lambda \cap f^{-1}(z)) = \bigcap_\lambda E_\lambda \cap f^{-1}(z)$  も空でない。したがって  $f(\bigcap_\lambda E_\lambda) = Z$  が成り立つ。すなわち  $\bigcap_\lambda E_\lambda \in \Sigma$  となり, 全順序部分集合  $\{E_\lambda\}_\lambda$  の下界を与える。

よって Zorn の補題により  $\Sigma$  は極小元  $K \in \Sigma$  を持つ。これが求めるものである。□

**定理 1.32.** コンパクト Hausdorff 空間  $X$  に対して,

$$X \text{ は extremally disconnected である} \iff X \text{ は CHaus の射影的対象である}$$

が成り立つ。

*Proof.* コンパクト Hausdorff 空間の圏 CHaus は pullback を持つから, 補題 1.23 より  $X$  が射影的であることは, CHaus のすべての全射連続写像  $f: Y \rightarrow X$  が section をもつことと同値であることに注意する。

( $\Leftarrow$ ):  $X$  は CHaus の射影的対象であるとし, 開集合  $U \subseteq X$  をとる。二元集合  $\{0, 1\}$  を離散空間とみなし, 直積空間  $X \times \{0, 1\}$  の部分空間

$$Y = ((X \setminus U) \times \{0\}) \cup (\overline{U} \times \{1\}) \subseteq X \times \{0, 1\}$$

を考える。コンパクト Hausdorff 空間  $X \times \{0, 1\}$  の閉部分空間だから,  $Y$  もコンパクト Hausdorff である。合成射

$$f := (Y \hookrightarrow X \times \{0, 1\} \xrightarrow{\text{pr}_1} X)$$

を考えると  $f$  は CHaus の全射連続写像だから, section  $s: X \rightarrow Y$  をもつ.  $f \circ s = \text{id}_X$  より  $f \circ s(U) = U$  であるから,  $s(U) \subseteq f^{-1}(U) = U \times \{1\}$  となる.  $s$  の連続性より

$$s(\overline{U}) \subseteq \overline{s(U)} \subseteq \overline{U \times \{1\}} = \overline{U} \times \{1\}$$

となるから,  $\overline{U} \subseteq s^{-1}(\overline{U} \times \{1\})$  がわかる. 一方で,  $x \in s^{-1}(\overline{U} \times \{1\})$  をとると,  $s(x) \in \overline{U} \times \{1\}$  より  $x = f \circ s(x) \in f(\overline{U} \times \{1\}) = \overline{U}$  となる. よって  $\overline{U} = s^{-1}(\overline{U} \times \{1\})$  が成り立つことがわかった.  $\overline{U} \times \{1\} = Y \cap (X \times \{1\})$  であることからこれは  $Y$  の開集合であり, したがって  $\overline{U}$  が  $X$  の開集合となる.

( $\Rightarrow$ ):  $X$  は extremally disconnected であるとし, CHaus の全射連続写像  $f: Y \rightarrow X$  をとる. 補題 1.31 より, コンパクトな部分集合  $K \subseteq Y$  が存在して,  $f|_K: K \rightarrow X$  は CHaus の全射連続写像で

( $\star$ )  $K$  の真なるすべての閉集合  $E$  に対して  $f|_K(E) = f(E) \neq X$  となる

をみatus. よって補題 1.30 より  $f|_K$  は同相となる. このとき  $s = (X \xrightarrow{(f|_K)^{-1}} K \hookrightarrow Y)$  とおけば,  $s$  は  $f$  の section になる.  $\square$

**命題 1.33.**  $D$  を離散空間とすると, その Stone-Ćech コンパクト化  $\beta D$  は CHaus の射影的对象である. 特に定理 1.32 より  $\beta D$  は extremally disconnected である.

*Proof.* 離散位相空間  $D$  の台集合を同じ記号  $D$  で表すと  $D = D^{\text{disc}}$  である. 忘却関手  $\text{CHaus} \rightarrow \text{Set}$  はエビ射を保ち,  $\beta \circ (-)^{\text{disc}}: \text{Set} \rightarrow \text{Top} \rightarrow \text{CHaus}$  を左随伴に持つ. よって命題 1.24 より合成関手  $\beta \circ (-)^{\text{disc}}$  は射影的对象を保つ.  $\text{Set}$  においてはすべての対象が射影的だから, 離散空間  $D$  に対して  $\beta D = \beta(D^{\text{disc}})$  は射影的である.  $\square$

**命題 1.34.** コンパクト Hausdorff 空間の圏 CHaus は十分射影的对象を持つ. すなわち, すべての対象  $X \in \text{CHaus}$  は extremally disconnected な対象  $X' \in \text{CHaus}$  からの全射  $X' \twoheadrightarrow X$  を持つ.

*Proof.*  $X$  をコンパクト Hausdorff 空間とする.  $X$  の台集合に離散位相をいれた空間を  $D$  とすると, 全射連続写像  $\text{id}: D \rightarrow X$  が得られる. Stone-Ćech コンパクト化  $\beta D$  の普遍性により

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\eta_D} & \beta D \\ & \searrow \text{id} & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

を可換にする CHaus の射  $g: \beta D \rightarrow X$  が一意に存在する. 命題 1.33 より  $\beta D$  は射影的であり,  $\text{id}$  が全射より  $g$  も全射となる.  $\square$

**補足 1.35.** Extremally disconnected なもののなす充満部分圏  $\text{Extr} \subseteq \text{CHaus}$  は一般に直積を持たない ([Lan22, Prop. 2.54]).

## 2 凝縮集合

この節の目的は、 $p$  リキッドベクトル空間のなすテンソル Abel 圏を導入することである。

### 2.1 Condensed 集合の定義

凝縮集合は、Stone 空間の圏  $\mathbf{Stone}$  上の層である。まずは  $\mathbf{Stone}$  上の Grothendieck 位相を定義する。

**定義 2.1.** コンパクト Hausdorff 空間（もしくは Stone 空間） $S$  に対して、 $\mathbf{CHaus}$ （もしくは  $\mathbf{Stone}$ ）の射の族  $\{f_i: S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$  が被覆であるとは、 $I$  が有限集合で誘導される射  $\coprod_i f_i: \coprod_i S_i \rightarrow S$  が全射であるときをいう。

**命題 2.2.** 上の被覆は  $\mathbf{CHaus}$ （もしくは  $\mathbf{Stone}$ ）上の Grothendieck プレ位相を定める。

*Proof.* コンパクト Hausdorff 空間（もしくは Stone 空間） $S$  の被覆の集合を  $\text{Cov}(S)$  とする。この対応  $\text{Cov}$  が定義 A.10 の条件 (1)–(3) をみたすことを確認する。

(1)  $V \rightarrow U$  が同型なら全射なので  $\{V \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$  である。

(2) 被覆  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$  と  $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}_{j \in J_i} \in \text{Cov}(U_i)$  をとるとき、 $I, J_i$  は有限集合で

$$\coprod_i U_i \rightarrow U, \quad \coprod_j V_{ij} \rightarrow U_i$$

は全射である。このとき

$$\coprod_{i,j} V_{ij} \rightarrow \coprod_i U_i \rightarrow U$$

も全射である。一つ目の余積の添え字集合  $\coprod_{i \in I} J_i$  は有限集合であるから、 $\{V_{ij} \rightarrow U_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \text{Cov}(U)$  がわかる。

(3)  $\mathbf{CHaus}$ （もしくは  $\mathbf{Stone}$ ）はすべての pullback を持ち、それは  $\mathbf{Top}$  での pullback に一致する。被覆  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$  と射  $V \rightarrow U$  に対して、 $\mathbf{Top}$  での pullback が  $\mathbf{Set}$  でのそれに適切な位相を乗せたものになることから

$$\coprod_i (U_i \times_U V) \rightarrow V$$

が全射になることがわかる。よって  $\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_i \in \text{Cov}(V)$  となる。  $\square$

**補足 2.3.** 命題 2.2 のような位相は、より一般に接続圏上においても定義でき、接続位相 (coherent topology) と呼ばれる。

以下  $\mathbf{CHaus}$ （もしくは  $\mathbf{Stone}$ ）には命題 2.2 の Grothendieck プレ位相を与えておく。 $\mathbf{CHaus}$ （もしくは  $\mathbf{Stone}$ ）上の Grothendieck プレ位相が定まったので、その上の層が定義できる。これは以下のような特徴づけを持つ。

**補題 2.4.** (1) 有限個のコンパクト Hausdorff 空間  $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) について  $S := \coprod_i S_i$  と置くとき、 $i \neq j$  ならば  $S_i \times_S S_j = \emptyset$  が成り立つ。  
 (2) 有限個のコンパクト Hausdorff 空間  $S_i, S'_j$  ( $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ) について、 $(\coprod_i S_i) \times_S (\coprod_j S'_j) \cong \coprod_{i,j} (S_i \times_S S'_j)$  が成り立つ。

*Proof.* 忘却関手  $\mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Set}$  がすべての極限と有限余積を保ち、かつ conservative であることから、 $\mathbf{Set}$  の議論に帰着することで確認できる。  $\square$

**命題 2.5.** 圏  $\mathcal{C}$  を  $\mathbf{CHaus}$  もしくは  $\mathbf{Stone}$  とする。このとき前層  $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  が層であることは、

- (1) 有限個の  $\mathcal{C}$  の対象  $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して自然な射

$$F\left(\coprod_i S_i\right) \rightarrow \prod_i F(S_i)$$

が同型である。

- (2) 任意の  $\mathcal{C}$  の全射  $p: S' \rightarrow S$  に対して

$$F(S) \xrightarrow{F(p)} F(S') \xrightarrow[(p_2)^*]{(p_1)^*} F(S' \times_S S')$$

は equalizer である。ただし  $p_i: S' \times_S S' \rightarrow S'$  は射影である。

をみたすことと同値である。

*Proof.*  $\mathbf{CHaus}$  の場合で証明する。Stone のときも同様である。

( $\Rightarrow$ ):  $F$  が層であるとする。

- (1) 有限個の対象  $S_i \in \mathcal{C}$  に対して、 $S = \coprod_i S_i$  と置くと  $\{S_i \rightarrow S\}_i$  は  $S$  の被覆である。補題 2.4 と  $F(\emptyset) = *$  であることを用いると、層の条件より

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_i F(S_i)$$

が equalizer となる。よって  $F(S) \cong \prod_i F(S_i)$  がわかる。

- (2)  $p: S' \rightarrow S$  を全射とすると、 $\{S' \xrightarrow{p} S\} \in \text{Cov}(S)$  である。よって層の条件より明らかである。

( $\Leftarrow$ ): 前層  $F$  が命題の条件 (1), (2) をみたすとする。被覆  $\{S_i \rightarrow S\}_i \in \text{Cov}(S)$  に対して、 $S' := \coprod_i S_i$  と置くと自然な射  $S' \rightarrow S$  は全射である。よって条件 (2) より

$$F(S) \longrightarrow F(S') \rightrightarrows F(S' \times_S S')$$

は equalizer である。条件 (1) と補題 2.4 より

$$\begin{aligned} F(S') &= F\left(\coprod_i S_i\right) \cong \prod_i F(S_i), \\ F(S' \times_S S') &\cong F\left(\coprod_{i,j} (S_i \times_S S_j)\right) \cong \prod_{i,j} F(S_i \times_S S_j) \end{aligned}$$

となるから

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \times_S S_j)$$

が equalizer となる。したがって  $F$  は層である。  $\square$

さて、 $\text{Cont} = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}$  と表すこととする。位相空間  $T$  に対して、 $\underline{T} = \text{Cont}(-, T)|_{\mathbf{CHaus}} : \mathbf{CHaus}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  と置くことで、関手

$$\underline{(-)}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{CHaus})$$

が得られる。Stone についても同様。

■ **命題 2.6.** 任意の位相空間  $T$  について、前層  $\underline{T}$  は CHaus (もしくは Stone) 上の層である。

*Proof.* CHaus の場合で証明する。

前層  $\underline{T}$  が命題 2.5 の条件をみたすことを示せばよい。(1) は  $\text{Cont}(-, T) = \text{Hom}_{\text{Top}}(-, T)$  が余積を積にうつすことから明らか。(2)  $p: S' \rightarrow S$  を Stone の全射とすると、命題 1.2 より

$$S' \times_S S' \rightrightarrows S' \xrightarrow{p} S$$

は Top での coequalizer である。よって  $\text{Cont}(-, T)$  がこの図式を equalizer に送ることから従う。□

■ **系 2.7.** 特にコンパクト Hausdorff 空間 (もしくは Stone 空間)  $S$  に対して、 $h_S = \text{Cont}(-, S)$  は CHaus (もしくは Stone) 上の層である。言い換えれば、定義 2.1 の位相は subcanonical である。

■ **補題 2.8.** コンパクト Hausdorff 空間  $V$  とその被覆  $\{V_i \rightarrow V\}_i$  を取る。このとき  $\text{Sh}(\text{CHaus})$  において

$$\coprod_{i,j} h_{V_i \times_V V_j} \rightrightarrows \coprod_i h_{V_i} \longrightarrow h_V \quad (\clubsuit)$$

は coequalizer である。ここで  $h_V = \text{Cont}(-, V)$  で、余積は  $\text{Sh}(\text{CHaus})$  において考えたものである。

同じ議論により、コンパクト Hausdorff 空間を Stone 空間に置き換えても主張は成り立つ。

*Proof.* 前層圏  $\text{PSh}(\text{CHaus})$  での余積を  $\coprod_i$  で表し、層の圏  $\text{Sh}(\text{CHaus})$  における余積を  $\coprod_i^{\text{sh}}$  で表すことにする。命題 A.4 より、層の族  $F_i$  に対して  $\coprod_i^{\text{sh}} F_i$  は前層  $\coprod_i F_i$  の層化である。このとき

$$\coprod_{i,j}^{\text{sh}} h_{V_i \times_V V_j} \rightrightarrows \coprod_i^{\text{sh}} h_{V_i} \xrightarrow{p} h_V$$

が  $\text{Sh}(\text{CHaus})$  での coequalizer になることを示そう。

任意の層  $F \in \text{Sh}(\text{CHaus})$  と層の射  $q: \coprod_i^{\text{sh}} h_{V_i} \rightarrow F$  に対して、 $q$  と合成して得られる平行射

$$\coprod_{i,j}^{\text{sh}} h_{V_i \times_V V_j} \rightrightarrows \coprod_i^{\text{sh}} h_{V_i} \xrightarrow{q} F$$

が一致するとする。ここで

$$\text{Hom}_{\text{Sh}(\text{CHaus})}\left(\coprod_i^{\text{sh}} h_{V_i}, F\right) \cong \text{Hom}_{\text{PSh}(\text{CHaus})}\left(\coprod_i h_{V_i}, F\right) \cong \prod_i \text{Hom}_{\text{PSh}(\text{CHaus})}(h_{V_i}, F) \cong \prod_i F(V_i)$$

より層の射  $q$  を与えることは、 $(x_i)_i \in \prod_i F(V_i)$  を与えることと同値である。この同型の下で  $q$  のみたす条件は、対応する  $(x_i)_i \in \prod_i F(V_i)$  がすべての  $i, j$  について  $x_i|_{V_i \times_V V_j} = x_j|_{V_i \times_V V_j}$  をみたすことと同値になる。このとき、 $F$  が層であることから一意的な元  $x \in F(V)$  が存在して、すべての  $i$  で  $x|_{V_i} = x_i$  となる。これは  $q$  が  $p$  を経由して

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i^{\text{sh}} h_{V_i} & \xrightarrow{p} & h_V \\ & \searrow q & \downarrow \exists! \\ & & F \end{array}$$

と一意的に分解することに対応する。したがって図式 (♣) は  $\text{Sh}(\text{CHaus})$  の coequalizer である。□

**系 2.9.** 次が成り立つ.

- (1) コンパクト Hausdorff 空間の族  $\{V_i\}_i$  に対して,  $\text{Sh}(\text{CHaus})$  において  $h_{\coprod_i V_i} \cong \coprod_i h_{V_i}$  が成り立つ.
- (2) コンパクト Hausdorff 空間の全射  $p: V' \twoheadrightarrow V$  に対して,

$$h_{S' \times_S S'} \rightrightarrows h_{S'} \xrightarrow{p} h_S$$

は  $\text{Sh}(\text{CHaus})$  における coequalizer である.

コンパクト Hausdorff 空間を Stone 空間に置き換えても同じことが成り立つ.

*Proof.* 補題 2.8 よりわかる. □

さらに次も成り立つ.

**補題 2.10.** コンパクト Hausdorff 空間  $V$  とその被覆  $\{V_i \rightarrow V\}_i$  を取る. このとき  $\text{Sh}(\text{Stone})$  において

$$\coprod_{i,j} \underline{V_i \times_V V_j} \rightrightarrows \coprod_i \underline{V_i} \longrightarrow \underline{V}$$

は coequalizer となる.

*Proof.* 頑張れば示せる: [Stacks, Tag 00XK]

(もう少し簡単な説明はできないか?) □

二つの層の圏  $\text{Sh}(\text{CHaus})$ ,  $\text{Sh}(\text{Stone})$  が得られたが, これらは実は圏同値になることがわかる.

**定理 2.11.** 包含関手  $\text{Stone} \hookrightarrow \text{CHaus}$  による制限  $\text{PSh}(\text{CHaus}) \rightarrow \text{PSh}(\text{Stone})$  は圏同値  $\text{Sh}(\text{CHaus}) \simeq \text{Sh}(\text{Stone})$  を誘導する.

*Proof.* 包含関手を  $i: \text{Stone} \hookrightarrow \text{CHaus}$  とする. このとき随伴

$$\begin{array}{ccc} \text{PSh}(\text{Stone}) & \xleftarrow{i^*} & \text{PSh}(\text{CHaus}) \\ & \searrow \perp \nearrow & \\ & i_* & \end{array}$$

が存在する. この随伴  $i^* \dashv i_*$  に関して

- (1)  $i_*$  は充満忠実である.
- (2)  $i^*, i_*$  は層を保つ. よって層の圏の間の随伴  $i^* \dashv i_*: \text{Sh}(\text{CHaus}) \rightleftarrows \text{Sh}(\text{Stone})$  が得られる.
- (3)  $i^*: \text{Sh}(\text{CHaus}) \rightarrow \text{Sh}(\text{Stone})$  は conservative である.

を証明すればよい.

(1) は,  $i$  が充満忠実であることから明らかである.

(2) 制限  $i^*: \text{PSh}(\text{CHaus}) \rightarrow \text{PSh}(\text{Stone})$  が層を保つことは明らか. 層  $F \in \text{Sh}(\text{Stone})$  に対して前層  $i_*(F) \in \text{PSh}(\text{CHaus})$  を考え, コンパクト Hausdorff 空間  $V$  とその被覆  $\{V_i \rightarrow V\}_i$  を取る. このとき  $i^*(h_V) = \text{Hom}(-, V)|_{\text{Stone}} = \underline{V}$  は層であるから,

$$i_*(F)(V) \cong \text{Hom}_{\text{PSh}(\text{CHaus})}(h_V, i_*(F)) \cong \text{Hom}_{\text{PSh}(\text{Stone})}(i^*(h_V), F) = \text{Hom}_{\text{Sh}(\text{Stone})}(\underline{V}, F)$$

となる。ここで補題 2.10 より

$$\coprod_{i,j} \underline{V_i \times_V V_j} \rightrightarrows \coprod_i \underline{V_i} \longrightarrow V$$

は  $\text{Sh}(\text{Stone})$  における coequalizer となる。関手  $\text{Hom}_{\text{Sh}(\text{Stone})}(-, F)$  は余極限を極限にうつすから, equalizer 図式

$$\text{Hom}_{\text{Sh}(\text{Stone})}(V, F) \longrightarrow \prod_i \text{Hom}_{\text{Sh}(\text{Stone})}(\underline{V_i}, F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \text{Hom}_{\text{Sh}(\text{Stone})}(\underline{V_i \times_V V_j}, F)$$

が得られ, これは

$$i_*(F)(V) \longrightarrow \prod_i i_*(F)(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} i_*(F)(V_i \times_V V_j)$$

が equalizer であることを意味する。よって  $i_*(F)$  も層となる。

(3) 命題 1.27 と命題 1.34 より, 任意のコンパクト Hausdorff 空間  $V \in \text{CHaus}$  はある Stone 空間  $S \in \text{Stone}$  からの全射  $p: S \twoheadrightarrow V$  を持つ。よって  $F \in \text{Sh}(\text{CHaus})$  に対して equalizer

$$F(V) \longrightarrow F(S) = i^*(F)(S) \xrightarrow[F(p_2)]{F(p_1)} F(S \times_V S)$$

が得られる。コンパクト Hausdorff 空間  $S \times_V S$  に対して, Stone 空間  $S'$  からの全射  $p': S' \twoheadrightarrow S \times_V S$  を取ると  $F(p'): F(S \times_V S) \rightarrow F(S')$  は単射で, よって命題 A.7 より

$$F(V) \longrightarrow F(S) = i^*(F)(S) \xrightarrow[F(p') \circ F(p_2)]{F(p') \circ F(p_1)} F(S') = i^*(F)(S')$$

も equalizer 図式になる。このことから  $F$  は  $i^*(F)$  から決まり,  $i^*$  は conservative とわかる。□

extremally disconnected な空間に制限すれば次のような特徴づけも得られる。

**命題 2.12.**  $\text{Extr}$  上の前層  $F: \text{Extr}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  で条件

- 有限個の  $\mathcal{C}$  の対象  $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して自然な射

$$F\left(\coprod_i S_i\right) \rightarrow \prod_i F(S_i)$$

が同型である。

をみたすもののなす充満部分圏を  $\text{PSh}^\times(\text{Extr}) \subseteq \text{PSh}(\text{Extr})$  と表す。このとき, 包含関手  $\text{Extr} \hookrightarrow \text{Stone}$  による制限  $\text{PSh}(\text{Stone}) \rightarrow \text{PSh}(\text{Extr})$  は圏同値  $\text{Sh}(\text{Stone}) \simeq \text{PSh}^\times(\text{Extr})$  を誘導する。

*Proof.* 便宜上, 部分圏  $\text{PSh}^\times(\text{Extr}) \subseteq \text{PSh}(\text{Extr})$  の対象を  $\text{Extr}$  上の層と呼ぶことにする<sup>\*4</sup>。包含関手を  $j: \text{Extr} \hookrightarrow \text{Stone}$  とする。このとき随伴

$$\begin{array}{ccc} \text{PSh}(\text{Extr}) & \xleftarrow{j^*} & \text{PSh}(\text{Stone}) \\ & \perp & \\ & \xrightarrow{j_*} & \end{array}$$

が存在する。この随伴  $j^* \dashv j_*$  に関して

<sup>\*4</sup> この呼び名は正しくて,  $\text{PSh}^\times(\text{Extr})$  も適切な層の圏として表現できる ([Åsg21, Theorem 1.2.18])。

- (1)  $j_*$  は充満忠実である.
- (2)  $j^*, j_*$  は層を保つ. よって層の圏の間の随伴  $j^* \dashv j_*: \text{Sh}(\text{Stone}) \rightleftarrows \text{PSh}^\times(\text{Extr})$  が得られる.
- (3)  $j^*: \text{Sh}(\text{Stone}) \rightarrow \text{PSh}^\times(\text{Extr})$  は conservative である.

を証明すればよい. これらは定理 2.11 の証明と同様にして確認できる:

- (1) は,  $j$  が充満忠実であることから明らかである.
- (2) 命題 2.5 より制限  $j^*: \text{PSh}(\text{Stone}) \rightarrow \text{PSh}(\text{Extr})$  が関手  $j^*: \text{Sh}(\text{Stone}) \rightarrow \text{PSh}^\times(\text{Extr})$  を誘導することはわかる. 関手  $j_*: \text{PSh}^\times(\text{Extr}) \rightarrow \text{Sh}(\text{Stone})$  が層を保つことは, **TODO**
- (3) 定理 2.11 の証明と同様. □

**補題 2.13.** 圏  $\mathcal{C}$  を  $\text{CHaus}$  もしくは  $\text{Stone}$  とし,  $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  をその上の前層とする. このとき  $\mathcal{C}$  の全射  $p: X' \twoheadrightarrow X$  に対して,  $X \in \text{Extr}$  ならば

$$F(X) \xrightarrow{F(p)} F(X') \xrightleftharpoons[(p_2)^*]{(p_1)^*} F(X' \times_X X')$$

は常に equalizer である.

*Proof.* 定理 1.32 より  $X$  は  $\text{CHaus}$  の射影的対象であるから,  $p$  は section を持つ. よって補題 A.9 より図式

$$X' \times_X X' \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} X' \xrightarrow{p} X$$

は split coequalizer であり, 任意の関手で保たれることから従う. □

凝縮集合の定義を与えよう.

**定義 2.14.** 凝縮集合 (*condensed set*) とは,  $\text{Stone}$  上の (命題 2.2 の Grothendieck プレ位相に関する)  $\text{Set}$  値の層のことである. 凝縮集合のなす圏を  $\text{CondSet} := \text{Sh}(\text{Stone})$  と表す.

定理 2.11 と命題 2.12 より圏同値

$$\text{CondSet} = \text{Sh}(\text{Stone}) \simeq \text{Sh}(\text{CHaus}) \simeq \text{PSh}^\times(\text{Extr})$$

が存在する.

**命題 2.15.** 凝縮集合の圏  $\text{CondSet}$  は完備かつ余完備である.

*Proof.* 定義より  $\text{CondSet} = \text{Sh}(\text{Stone})$  であることからわかる. □

命題 2.6 より関手  $\underline{(-)}: \text{Top} \rightarrow \text{PSh}(\text{Stone})$  は,

$$\underline{(-)}: \text{Top} \rightarrow \text{Sh}(\text{Stone}) = \text{CondSet}$$

を誘導する. この関手について次がわかる.

**命題 2.16.** 関手  $\underline{(-)}: \text{Top} \rightarrow \text{CondSet}$  は忠実である.

*Proof.* 構成から,  $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  を忘却関手とすると,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top} & \xrightarrow{(-)} & \mathbf{CondSet} \\ & \searrow U & \swarrow \text{ev}_* \\ & \mathbf{Set} & \end{array}$$

が可換になる.  $U$  が faithful であることから  $(-)$  もそうである.  $\square$

凝縮集合  $X$  に対して, 一点空間  $*$  での値  $X(*) \in \mathbf{Set}$  を  $X$  の台集合 (*underlying set*) という. 位相空間  $T$  に付随する凝縮集合  $\underline{T}$  の台集合は, ちょうどもとの位相空間の台集合に一致する.

米田の補題により, 切断  $x \in X(S)$  は凝縮集合の射  $x: \underline{S} \rightarrow X$  と思える. 一点空間での値を取ることによって写像  $S \rightarrow X(*)$  が得られ, これらは全射

$$\coprod_{\substack{S \in \mathbf{Stone}, \\ x \in X(S)}} S \twoheadrightarrow X(*)$$

を誘導する.  $X$  の台集合  $X(*)$  は, この全射による商位相を入れることで位相空間と思える. この位相空間を  $X(*)_{\text{top}}$  で表す. 対応  $X \mapsto X(*)_{\text{top}}$  が定める関手も  $\text{ev}_*: \mathbf{CondSet} \rightarrow \mathbf{Top}$  で表す.

**命題 2.17.** 関手  $\text{ev}_*: \mathbf{CondSet} \rightarrow \mathbf{Top}$  と  $\overline{(-)}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CondSet}$  は随伴

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CondSet} & \xrightleftharpoons[\overline{(-)}]{\text{ev}_*} & \mathbf{Top} \\ & \perp & \end{array}$$

をなす.

*Proof.* 位相空間  $T \in \mathbf{Top}$  と凝縮集合  $X \in \mathbf{CondSet}$  に対して, 自然な全単射

$$\Sigma: \text{Hom}_{\mathbf{CondSet}}(X, \underline{T}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X(*)_{\text{top}}, T)$$

が存在することを示そう.

凝縮集合の射  $\phi: X \rightarrow \underline{T}$  を取る. 各  $S \in \mathbf{Stone}$  と元  $s: * \rightarrow S$  に対して,  $\phi$  の自然性より可換図式

$$\begin{array}{ccc} X(S) & \xrightarrow{\phi(S)} & \underline{T}(S) = \text{Cont}(S, T) \\ X(s) \downarrow & & \downarrow \text{ev}_s \\ X(*) & \xrightarrow{\phi(*)} & \underline{T}(*) = \text{Cont}(*, T) = T \end{array}$$

が得られる. この図式から可換図式

$$\begin{array}{ccc} X(S) & \xrightarrow{\phi(S)} & \underline{T}(S) = \text{Cont}(S, T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{s \in S} X(*) & \xrightarrow{\quad} & \prod_{s \in S} T \\ \text{IR} & & \text{IR} \\ \text{Hom}(S, X(*)) & \xrightarrow{\phi(*) \circ -} & \text{Hom}(S, T) \end{array}$$

(♠)

が得られる．これより  $\phi(*): X(*) \rightarrow T$  は，すべての  $S \in \mathbf{Stone}$  と  $g \in X(S)$  に対して  $\phi(S)(g) = \phi(*) \circ g(*)$  が連続となる．これは  $X(*)_{\text{top}}$  の位相の入れ方から，これは  $\phi(*)$  が連続写像  $X(*)_{\text{top}} \rightarrow T$  になることを意味する．この連続写像を  $\Sigma(\phi)$  と置けば，写像

$$\Sigma: \mathbf{Hom}_{\mathbf{CondSet}}(X, \underline{T}) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X(*)_{\text{top}}, T)$$

が定まる．図式 (♠) の右辺が単射であることから， $\Sigma$  は単射であることがわかる．

連続写像  $f: X(*)_{\text{top}} \rightarrow X$  が与えられたとき， $X(*)_{\text{top}}$  の位相の入れ方より，すべての  $S \in \mathbf{Stone}$  と  $g: \underline{S} \rightarrow X$  に対して  $\phi(S)(g) = f \circ g(*)$  が連続となる．これより写像  $f \circ -: X(S) \rightarrow \mathbf{Cont}(S, T)$  が得られる．この写像が  $S$  について自然であることが確認でき，凝縮集合の間の射  $f \circ -: X \rightarrow \underline{T}$  が定まる．このとき，

$$(f \circ -)(*): X(*) \rightarrow T, \quad x \mapsto f \circ x(*) = f(x)$$

であるから  $\Sigma(f \circ -) = (f \circ -)(*) = f$  となる．したがって  $\Sigma$  は全射である．  $\square$

関手  $(-): \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CondSet}$  は忠実であるが，一般には充満ではない．しかしコンパクト生成な位相空間に制限すると充満になることがわかる．

**定義 2.18.** 位相空間  $T$  が**コンパクト生成** (*compactly generated*) であるとは，任意の位相空間  $T'$  と連続とは限らない写像  $f: T \rightarrow T'$  に対して，すべてのコンパクト Hausdorff 空間  $K$  と連続写像  $g: K \rightarrow T$  について  $f \circ g$  が連続ならば， $f$  が連続になるときをいう．

**補足 2.19.** 定義 2.18 において，コンパクト Hausdorff 空間  $K$  を Stone 空間に限ってもよい．なぜなら，命題 1.34 よりすべてのコンパクト Hausdorff 空間は Stone 空間からの全射を持つからである．

**命題 2.20.** 関手  $(-): \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CondSet}$  は，コンパクト生成空間上で充満忠実である．

*Proof.* 位相空間  $T$  に対して，命題 2.17 の随伴の余単位射  $\underline{T}(*)_{\text{top}} \rightarrow T$  が得られる． $T$  がコンパクト生成のとき， $\underline{T}(*)_{\text{top}}$  の位相の入れ方からこれは  $T$  の位相と一致する．つまりコンパクト生成空間上で余単位射は同型となることがわかる．よってコンパクト生成空間の部分圏に制限すれば充満忠実になる．  $\square$

コンパクト生成空間は次のような位相空間を含み，こうした位相空間上では関手  $(-)$  は充満忠実となる．

**例 2.21** ([nLab, “compactly generated topological space”]). (1) コンパクト Hausdorff 空間はコンパクト生成である．より一般に，局所コンパクト Hausdorff 空間はコンパクト生成である．  
 (2) 位相多様体はコンパクト生成である．  
 (3) CW 複体はコンパクト生成である．  
 (4) 第一可算空間はコンパクト生成である．特に距離空間はコンパクト生成である．

最後に凝縮集合の例をいくつかみよう．

**例 2.22.** • 集合  $S$  を離散位相空間と思うとき，凝縮集合の同型  $(\Delta_S)^{\text{sh}} \cong \overline{S}$  が成り立つ．

## 2.2 CondSet の部分圏

部分圏の階層

$$\text{qcProj} \subset \text{Prof} \subset \text{qcqs} \subset \text{qs} \subset \text{CondSet} \quad (1)$$

を導入する.

まず, 凝縮集合  $X$  が**副有限集合** (*profinite set*) であるとは, 表現可能関手と同型となるときをいう. つまり副有限な凝縮集合のなす充満部分圏を  $\text{Prof} \subseteq \text{CondSet}$  とすると  $\text{Stone} = \text{Prof}$  である. これは命題 1.18 の記法と整合的である.

**補題 2.23.** Stone 空間の間の全射  $f: S \rightarrow T$  に対して,  $\underline{f}: \underline{S} \rightarrow \underline{T}$  は CondSet においてエピ射である.

*Proof.*  $U \in \text{Stone}$  と  $t \in \underline{T}(U) = \text{Hom}_{\text{Top}}(U, T)$  を任意にとる. 命題 1.34 より, ある  $U' \in \text{Extr}$  と全射連続写像  $U' \twoheadrightarrow U$  が存在する. このとき  $\{U' \twoheadrightarrow U\}$  は Stone における  $U$  の被覆になることに注意する. 連続写像  $U' \rightarrow U \xrightarrow{t} T$  を考えると,  $U'$  が Stone の射影的对象であることから

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow U \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

を可換にする射  $U' \rightarrow S$  が存在する. 言い換えれば,  $t|_{U'} \in \underline{T}(U')$  は  $\underline{f}: \underline{S}(U') \rightarrow \underline{T}(U')$  の像に入る. 以上より  $\underline{f}$  は CondSet のエピ射となる.  $\square$

凝縮集合の射の族  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  が *jointly epi* であるとは, CondSet において誘導される射  $\coprod_i X_i \rightarrow X$  がエピ射であるときをいう.

**補題 2.24.** 凝縮集合の射の族  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  が jointly epi であることは, 次の条件をみたすことと同値である:

- 任意の  $S \in \text{Stone}$  と  $s \in X(S)$  に対して,  $S$  の被覆  $\{S_j \rightarrow S\}_j$  が存在して, 各  $j$  について,  $s|_{S_j}$  が  $X_i(S_j) \rightarrow X(S_j)$  の像に入るような  $i$  が取れる.

*Proof.*  $\square$

**定義 2.25** (準コンパクト). 凝縮集合  $X \in \text{CondSet}$  が**準コンパクト** (*quasi-compact*, or *qc*) であるとは, CondSet における任意の jointly epi な射の族  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  に対して, 有限部分集合  $I_0 \subset I$  が存在して射の族  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I_0}$  が jointly epi になるときをいう. 準コンパクトな凝縮集合のなす充満部分圏を  $\text{qc} \subseteq \text{CondSet}$  と表す.

すべての凝縮集合は副有限集合の直和からの epi 射をもつ. よって準コンパクトな凝縮集合の定義における  $X_i$  は全て副有限集合としてよい.

■ **補題 2.26.** 副有限集合は準コンパクトである.

*Proof.* Stone 空間  $S$  に対して,  $\underline{S}$  が準コンパクトであることを示そう. Stone 空間の間の連続写像の族  $\{f_i: T_i \rightarrow S\}_{i \in I}$  で, 誘導される射  $\coprod_i h_{T_i} \rightarrow h_S$  がエピ射となるものを取る. このとき  $\text{id}_S \in h_S(S)$  を考えると,  $S$  の被覆  $\{S_j \rightarrow S\}_j$  が存在して, 各  $j$  について, ある  $i_j \in I$  と  $t_j \in h_{T_{i_j}}(S_j) = \text{Hom}_{\text{Top}}(S_j, T_{i_j})$  で

$$\begin{array}{ccc} S_j & \xrightarrow{\quad} & S \\ & \searrow t_j & \nearrow f_{i_j} \\ & T_{i_j} & \end{array}$$

が可換になるようなものが取れる. このとき  $I_0 = \{i_j \mid j \in J\}$  と置くと,  $I_0$  は  $I$  の有限部分集合であり,  $\{S_j \rightarrow S\}_j$  が被覆であることから  $\coprod_j T_{i_j} \rightarrow S$  が全射であることがわかる. 補題 2.23 と系 2.9 より  $\text{CondSet}$  において

$$\coprod_{i \in I_0} T_i = \coprod_j T_{i_j} \cong \underline{\coprod_j T_{i_j}} \rightarrow \underline{S}$$

がエピ射になる. したがって  $\underline{S}$  は準コンパクトである. □

■ **命題 2.27.** 凝縮集合  $X \in \text{CondSet}$  が準コンパクトであることは, 副有限集合からの epi 射を持つことと同値である.

*Proof.* □

■ **命題 2.28.** Stone 空間  $S$  と  $\text{CondSet}$  での部分対象  $X \hookrightarrow \underline{S}$  に対して, 次は同値である.

- (1)  $X$  は準コンパクトである.
- (2)  $X$  は副有限である.
- (3) 閉部分空間  $C \subseteq S$  が存在して,  $\underline{S}$  の部分対象としての同型  $X \cong \underline{C}$  が成り立つ.

*Proof.* (3)  $\Rightarrow$  (2): 明らか.

(2)  $\Rightarrow$  (1): 補題 2.26 ですで見えた.

(1)  $\Rightarrow$  (3):  $X$  が準コンパクトであるとき,

**TODO** □

■ **定義 2.29.** 凝縮集合  $X \in \text{CondSet}$  が準分離的 (*quasi-separated*, or *qs*) であるとは, 任意の Stone 空間  $S, S'$  と凝縮集合の射  $f: \underline{S} \rightarrow X$ ,  $f': S' \rightarrow X$  に対して, pullback  $\underline{S} \times_X \underline{S'}$  が準コンパクトであるときをいう. 準分離的な凝縮集合のなす充満部分圏を  $\text{qs} \subseteq \text{CondSet}$  と表す.

■ **定義 2.30.** 凝縮集合の射  $\phi: X \rightarrow Y$  が閉 (*closed*) であるとは, 任意のコンパクト Hausdorff 空間  $K$  と凝縮集合の射  $\underline{K} \rightarrow Y$  に対して, pullback  $\underline{K} \times_Y X$  がコンパクト Hausdorff 空間に付随して得られる凝縮集合と同型になるときをいう.

■ **命題 2.31.** 凝縮集合  $X$  が準分離的であることは, 対角射  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  が閉であることと同値である.

*Proof.* □

補題 2.32. 副有限集合は準分離的である.

準コンパクトかつ準分離的な凝縮集合のなす充満部分圏を  $\text{qcqs} \subseteq \text{CondSet}$  とすると, 充満部分圏の包含

$$\text{Prof} \subset \text{qcqs} \subset \text{qs} \subset \text{CondSet} \quad (2)$$

が得られたことになる.

命題 2.33. 関手  $(-): \text{Top} \rightarrow \text{CondSet}$  は, 圏同値  $\text{CHaus} \simeq \text{qcqs}$  を誘導する.

Proof. **TODO**

□

最後に射影的な凝縮集合を導入する.

定義 2.34. 凝縮集合  $X$  が射影的 (*projective*) であるとは, 任意の  $\text{CondSet}$  における  $\text{epi}$  射  $Y \twoheadrightarrow X$  が切断をもつときをいう.

補足 2.35. 圏  $\text{CondSet}$  は pullback を持つから, 補題 1.23 より, 凝縮集合の射影性は定義 1.21 の意味での射影性と同値である.

これは任意の  $\text{CondSet}$  における全射  $A \twoheadrightarrow B$  について  $\text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(X, B)$  が集合の全射であることと同値である.

補題 2.36. 任意の副有限集合  $S \in \text{Prof}$  に対して, ある射影的な副有限集合  $S' \in \text{Prof}$  と  $\text{CondSet}$  の  $\text{epi}$  射  $S' \twoheadrightarrow S$  が存在する.

Proof.

□

命題 2.37. 射影的な凝縮集合  $X$  に対して,  $X$  が準コンパクトであることは  $X$  が副有限集合であることと同値である.

Proof.

□

**命題 2.38.** 任意の  $S \in \text{Prof}$  に対して、以下の関手

$$\begin{array}{ccc} ev_s: \text{CondSet} & \rightarrow & \text{Set} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ X & \mapsto & X(S) \end{array}$$

は極限とフィルター余極限と交換する。

さらに、 $S \in \text{Extr}$  なら、関手  $ev_S$  は全射を保存する。

*Proof.*  $ev_S$  には左随伴  $L_S(F) = \coprod_F \underline{S}$  が存在する。よって、極限と可換である。米田埋め込み  $\underline{S}$  は  $\text{CondSet}$  においてコンパクト対象である。そのため、フィルター余極限と交換する。

次に  $S \in \text{Extr}$  と仮定する。全射  $f: X \rightarrow Y$  と  $S$  上の切断  $y \in Y(S)$  をとる。全射性からある被覆  $(U_i \rightarrow S)_i$  と  $U_i$  上の切断の族  $x_i \in X(U_i)$  があり、 $y_i = y|_{U_i}$  は  $y_i = f(x_i)$  を満たす。 $S$  は極めて非連結であるため、 $\pi: \coprod U_i \rightarrow S$  は切断  $\iota$  を持つ。 $x = \iota^*(\coprod_i y_i) \in X(S)$  とすると、 $f(x) = y$  である。

□

## 2.3 Condensed Abelian Groups

■ **定義 2.39.** 凝縮 Abel 群とは,  $\text{CondSet}$  の Abel 群対象のことである.

忘却関手  $U: \text{CondAb} \rightarrow \text{CondSet}$  に対して, 以下の左随伴が定義できる.

$$\begin{array}{ccc} \text{CondSet} & \rightarrow & \text{CondAb} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ X & \mapsto & \mathbb{Z}[X] \end{array}$$

ここで, 「自由生成凝縮アーベル群」 $\mathbb{Z}[X]$  は  $(S \rightarrow \mathbb{Z}[X(S)])$  の層化として得られるものである.

■ **定義 2.40.** テンソルの定義 **TODO**

任意の凝縮アーベル群  $N$  に対して, 関手  $N \otimes -: \text{CondSet} \rightarrow \text{CondSet}$  は左随伴を持つ. これを内部ホム関手  $\underline{\text{Hom}}(-, -)$  という.

■ **定義 2.41.** 平坦対象の定義 **TODO**

### 3 リキッド凝縮アーベル群

#### 3.1 リキッド凝縮ベクトル空間

補題 3.1.  $\mathcal{M}_{<p}(S)$  は qs である.

Proof. **TODO** □

次の定理は, Liquid ベクトル空間を扱う上で最も基本的な定理であるが, 証明が長大であるため, 本ノートでは認めて用いることにする.

定理 3.2. [CS22, THEOREM 3.11]  $0 < p \leq 1$  を固定する.

- $V$  を Condensed Abel 群とする. このとき, 次は同値である.
  - (1) 任意の  $S \in \mathbf{Prof}$ , 任意の Condensed 集合の射  $f: S \rightarrow V$  と任意の  $0 < q < p$  に対して,  $f$  は Condensed Abel 群の射  $\tilde{f}_q: \mathcal{M}_q(S) \rightarrow V$  へ一意に拡大する.
  - (2) 任意の  $S \in \mathbf{Prof}$  と任意の Condensed 集合の射  $f: S \rightarrow V$  に対して,  $f$  は Condensed Abel 群の射  $\tilde{f}_{<p}: \mathcal{M}_{<p}(S) \rightarrow V$  へ一意に拡大する.
  - (3) 各  $V$  に対し, 副有限集合  $T_j, S_i$  が存在して, 次の形の射の余核として書ける;

$$\bigoplus_j \mathcal{M}_{<p}(T_j) \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{M}_{<p}(S_i).$$

上記の性質を満たす対象のなす  $\mathbf{CondAb}$  の充満部分圏を  $\mathbf{Liquid}_p$  と書く.

- $\mathbf{Liquid}_p$  は  $\mathbf{CondAb}$  の部分 Abel 圏である. 更に, 任意の極限, 余極限, 拡大, 内部 Hom と内部 Ext を含む.
- 自然な埋め込み  $\mathbf{Liquid}_p \hookrightarrow \mathbf{CondAb}$  は,  $p$ -liquid 化と呼ばれる左随伴 ( $M \mapsto M^{\text{liq}}$ ) を持つ.
- Abel 圏  $\mathbf{Liquid}_p$  は,  $p$ -liquid 化を対称モノイダルにするような対称モノイダル圏の構造  $-\otimes^{\text{liq}}-$  (Liquid テンソル積) が一意に入る. (本来  $\otimes^{\text{liq}}$  は  $\otimes^{p-\text{liq}}$  と書くべきである.)

次に, 二つの Abel 圏  $\mathbf{Liquid}_p$ ,  $\mathbf{CondAb}$  の導来圏について考える.

- 自然な導来圏の間の関手  $D(\mathbf{Liquid}_p) \rightarrow D(\mathbf{CondAb})$  は充満忠実である. 更に,  $p$ -liquid 化の左導来関手がこの埋め込みの左随伴を与える. また, Liquid テンソル積の左導来関手によって  $D(\mathbf{Liquid}_p)$  は対称モノイダル圏の構造を持つ.
- 任意の  $C \in D(\mathbf{Liquid}_p)$ , 任意の  $S \in \mathbf{Prof}$  と任意の  $q < p$  に対して, (上記の同値条件に対応する) 次の同型が存在する;

$$\mathbf{RHom}_{D(\mathbf{CondAb})}(\mathcal{M}_{<p}(S), C) \cong \mathbf{RHom}_{D(\mathbf{CondAb})}(\mathcal{M}_q(S), C) \cong \mathbf{RHom}_{D(\mathbf{CondAb})}(\mathbb{Z}[S], C).$$

補足 3.3. 定理の  $p$ -Liquid の対象の特徴づけから,  $S \in \mathbf{Prof}$  に対して次が成り立つ;

$$\mathbb{Z}[S]^{\text{liq}} = \mathcal{M}_{<p}(S).$$

特に  $S = *$  とすることで,  $\mathbb{Z}^{\text{liq}} = \mathbb{R}$  であることが分かる. 従って,  $\otimes^{\text{liq}}$  のモノイド単位は  $\mathbb{R}$  であり, 任意

■ の  $p$ -Liquid は Condensed  $\mathbb{R}$ -加群の構造を持つ.

■ **定理 3.4.** 各  $S \in \text{Prof}$  に対して,  $\mathcal{M}_{< p}(S) \in \text{Liquid}_p$  は平坦である.

証明を与える前に, いくつかの記法と補題を導入する.

$S$  を有限集合,  $V$  を qs  $p$ -liquid  $\mathbb{R}$ -加群,  $K \subset V$  を  $q$ -凸部分対象とする. このとき,  $|S|$  個の  $K \cong [s] \otimes K \subset \mathbb{R}[S] \otimes V$  の ( $\mathbb{R}[S] \otimes V$  中の)  $q$ -凸包を  $\mathcal{M}_q(S, K)$  と書く.

$S \in \text{Prof}$  に対して,  $S = \varprojlim_i S_i$  と書いたとき,  $\mathcal{M}_q(S, K) := \varprojlim_i \mathcal{M}_q(S_i, K)$  と定める. さらに,

$$\mathcal{M}_{< p}(S; V) := \bigcup_{q < p} \bigcup_{K \subset V: q\text{-convex}} \mathcal{M}_q(S, K)$$

とする. 以上の記法の下, 次が成り立つ;

■ **補題 3.5.** 関手  $V \mapsto \mathcal{M}_{< p}(S; V)$  は qs  $p$ -liquid  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間の間の直和と可換な完全自己関手を定める.

*Proof.*

□

■ **補題 3.6.**  $\mathcal{M}_{< p}(S; \mathcal{M}_{< p}(T)) \cong \mathcal{M}_{< p}(S \times T)$

*Proof.* **TODO** 定義を展開して考えると分かると書いてあるが, よくわかっていない.

□

■ **補題 3.7.**  $V$  が qs とする. このとき,

$$\mathcal{M}_{< p}(S) \otimes^{\text{liq}} V \cong \mathcal{M}_{< p}(S; V)$$

特に,  $V = \mathcal{M}_{< p}(T)$  のとき,  $\mathcal{M}_{< p}(S) \otimes^{\text{liq}} \mathcal{M}_{< p}(T) \cong \mathcal{M}_{< p}(S \times T)$  が成り立つ.

*Proof.*

□

*Proof of ??.* **TODO**

□

## 3.2 リキッドテンソル積の計算例

## 3.3 正則関数のなす層の構成

## A 圏論の基礎

### A.1 極限, 随伴

■ **命題 A.1.** 左随伴は余極限を保つ. 双対的に, 右随伴は極限を保つ.

*Proof.* [Rie17, Theorem 4.5.2] □

**例 A.2.** 位相空間の圏  $\mathbf{Top}$  からの忘却関手を  $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  とする. 集合  $S$  に対し, 離散位相を考えることで位相空間  $S^{\text{disc}}$  が, 密着位相を考えることで位相空間  $S^{\text{indisc}}$  が得られる. この対応は関手  $(-)^{\text{disc}}, (-)^{\text{indisc}}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$  を定め, それぞれ忘却関手の左随伴, 右随伴になる. したがって忘却関手  $U$  は極限と余極限を保つ.

$$\begin{array}{ccc} & (-)^{\text{disc}} & \\ \swarrow & \perp & \searrow \\ \mathbf{Top} & \xrightarrow{U} & \mathbf{Set} \\ \nwarrow & \perp & \nearrow \\ & (-)^{\text{indisc}} & \end{array}$$

■ **定義 A.3.** 圏  $\mathcal{C}$  の充満部分圏  $\mathcal{D}$  が**反映的** (*reflective*) であるとは, 包含関手  $i: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  が左随伴を持つときをいう. 双対的に  $\mathcal{D}$  が**余反映的** (*coreflective*) であるとは, 包含関手  $i: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  が右随伴を持つときをいう.

■ **命題 A.4.** 圏  $\mathcal{C}$  の反映的充満部分圏  $\mathcal{D}$  について, 包含関手  $i: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  の左随伴を  $a: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  とする. このとき,

- (1)  $\mathcal{D}$  は  $\mathcal{C}$  の極限で閉じる.
- (2) 図式  $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$  に対して,  $\text{colim } F \cong a(\text{colim } i \circ F)$  が成り立つ.

特に  $\mathcal{C}$  が完備 (余完備) ならば  $\mathcal{D}$  も完備 (余完備) である.

*Proof.* [Rie17, Theorem 4.5.15] □

**例 A.5.** コンパクト Hausdorff 空間のなす圏  $\mathbf{CHaus}$  から位相空間の圏  $\mathbf{Top}$  への包含関手は左随伴  $\beta: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CHaus}$  を持つ. すなわち  $\mathbf{CHaus}$  は  $\mathbf{Top}$  の反映的充満部分圏である. この左随伴  $\beta$  を Stone-Čech コンパクト化と呼ぶ. 特に  $\mathbf{CHaus}$  は  $\mathbf{Top}$  の極限で閉じる.

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \swarrow & \perp & \searrow \\ \mathbf{CHaus} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Top} \end{array}$$

■ **定義 A.6.** 圏  $\mathcal{C}$  における平行射  $f, g: X \rightarrow Y$  に対して, その *equalizer* とは,  $f \circ e = g \circ e$  をみたす射  $e: E \rightarrow X$  であって次の普遍性をみたすもののことをいう:

- 別な射  $h: W \rightarrow X$  で  $f \circ h = g \circ h$  をみたすものがあるとき, 一意的な射  $k: W \rightarrow E$  が存在して,  $h = e \circ k$  が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccc}
 W & & & & \\
 \downarrow k & \searrow h & & & \\
 E & \xrightarrow{e} & X & \xrightleftharpoons[f]{g} & Y.
 \end{array}$$

双対的に coequalizer も定義される.

**命題 A.7.** 圏  $\mathcal{C}$  において

$$E \xrightarrow{e} X \xrightleftharpoons[f]{g} Y$$

を equalizer とする. このとき

- (1)  $e$  はモノ射である.
- (2)  $d: Y \rightarrow Z$  をモノ射とすると,

$$E \xrightarrow{e} X \xrightleftharpoons[d \circ g]{d \circ f} Z$$

もまた equalizer になる.

*Proof.* Straightforward. □

**命題 A.8.** 圏  $\mathcal{C}$  における図式

$$A \xrightleftharpoons[f]{g} B \xrightarrow{p} C \quad (3)$$

を考える.

- (1) 射  $s: C \rightarrow B$  と  $t: B \rightarrow A$  が存在して, 等式

$$p \circ s = \text{id}_C, \quad f \circ t = \text{id}_B, \quad s \circ p = g \circ t$$

をみたすとする. このとき図式 (3) は coequalizer になる. このような coequalizer を *split coequalizer* という.

- (2) さらにこのとき, 図式 (3) は任意の関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  によって保たれる. 任意の関手で保たれる coequalizer を *absolute coequalizer* という.

*Proof.* (1) Easy exercise. (2) は (1) から従う. □

**補題 A.9.** 圏  $\mathcal{C}$  の射  $p: X' \rightarrow X$  について pullback

$$\begin{array}{ccc}
 X' \times_X X' & \xrightarrow{p_2} & X' \\
 p_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\
 X' & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

が存在するとする.  $p$  が section を持つとき, 図式

$$X' \times_X X' \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} X' \xrightarrow{p} X$$

は split coequalizer である。

*Proof.*  $p$  の section を  $s: X \rightarrow X'$  とする。pullback の普遍性により、

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p} & X \\ & \searrow & \downarrow s \\ & & X' \\ & \nearrow & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{p} & X \end{array} = \begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{p} & X & \xrightarrow{s} & X' \\ & \searrow t & & & \downarrow p \\ & & X' \times_X X' & \xrightarrow{p_2} & X' \\ & \downarrow p_1 & \lrcorner & & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{p} & X & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

となる  $t: X' \rightarrow X' \times_X X'$  が得られる。このとき射  $s, t$  は明らかに等式

$$p \circ s = \text{id}_X, \quad p_1 \circ t = \text{id}_{X'}, \quad s \circ p = p_2 \circ t$$

をみたす。よって  $(X, p)$  は  $p_1, p_2$  の split coequalizer である。  $\square$

## A.2 アーベル圏

## A.3 Grothendieck 位相と景

**定義 A.10.** 圏  $\mathcal{C}$  上の **Grothendieck プレ位相** (Grothendieck pretopology)  $\mathcal{T}$  とは、各対象  $U \in \mathcal{C}$  に対し射の族  $\{U_i \rightarrow U\}_i$  からなる集合  $\text{Cov}_{\mathcal{T}}(U)$  を得る対応であって、

- (1) 同型射  $V \rightarrow U$  に対して  $\{V \rightarrow U\} \in \text{Cov}_{\mathcal{T}}(U)$  である
- (2)  $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \text{Cov}_{\mathcal{T}}(U)$  と各  $i$  について  $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}_{j \in J_i} \in \text{Cov}_{\mathcal{T}}(U_i)$  があるとき、 $\{V_{ij} \rightarrow U_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \text{Cov}_{\mathcal{T}}(U)$  となるから
- (3)  $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \text{Cov}_{\mathcal{T}}(U)$  と任意の射  $V \rightarrow U$  に対して、pullback  $U_i \times_U V$  が存在して、 $\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_i \in \text{Cov}_{\mathcal{T}}(V)$  となる

をみたすもののことをいう。しばしば単に Grothendieck 位相という。  $\text{Cov}_{\mathcal{T}}(U)$  の元を  $U$  の被覆と呼ぶ。

圏  $\mathcal{C}$  とその上の Grothendieck 位相  $\mathcal{T}$  の組  $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  のことを景 (site) と呼ぶ。位相  $\mathcal{T}$  が明らかな場合は、 $(\mathcal{C}, \text{Cov})$  とも表す。

射  $U_i \rightarrow U$  と  $U_j \rightarrow U$  に対して、その pullback 図式を

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_U U_j & \xrightarrow{p_2} & U_j \\ p_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ U_i & \longrightarrow & U \end{array}$$

とする。

**定義 A.11.** 圏  $\mathcal{C}$  上のプレ位相  $\mathcal{T}$  について、前層  $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  が層 (sheaf) であるとは、任意の被覆  $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \text{Cov}(U)$  に対して

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \xrightarrow[(p_2)^*]{(p_1)^*} \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

が equalizer になるときをいう。

**補足 A.12.**  $F$  が層のとき,  $F(\emptyset) = \{*\}$  である。

表現可能関手が常に層になるとき, Grothendieck 位相  $\mathcal{T}$  は *subcanonical* であるという。

**定義 A.13.** 景  $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  に対して  $\mathcal{C}$  上の層のなす  $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$  の充満部分圏を  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}) = \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  と表す。  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  の射を, 層の射と呼ぶ。

層の圏  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$  と圏同値な圏を Grothendieck トポスと呼ぶ。

**命題 A.14.** 景  $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  上の層のなす圏  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$  について, その包含関手  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T}) \hookrightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{C})$  は左随伴  $(-)^{\mathrm{sh}}: \mathrm{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  を持つ。この左随伴を層化関手という。

**定義 A.15.** 景  $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  上の層の射  $\phi: F \rightarrow G$  について,

- (1)  $\phi$  が単射であるとは, すべての  $U \in \mathcal{C}$  に対して  $\phi_U: F(U) \rightarrow G(U)$  が集合の単射であるときをいう。
- (2)  $\phi$  が全射であるとは, 任意の  $U \in \mathcal{C}$  と  $s \in G(U)$  に対して,  $U$  の被覆  $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)$  が存在して, 各  $i$  で  $s|_{U_i}$  が  $\phi_{U_i}: F(U_i) \rightarrow G(U_i)$  の像に入るときをいう。

**命題 A.16.** 景  $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  上の層の射  $\phi: F \rightarrow G$  に対して,

- (1)  $\phi$  が単射であることは,  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  においてモノ射であることと同値である。
- (2)  $\phi$  が全射であることは,  $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  においてエピ射であることと同値である。

*Proof.* Omit. □

**命題 A.17.** Grothendieck トポスにおいて, すべてのエピ射はカーネル対の coequalizer で表せる。特にエピ射は正則エピ射である。

*Proof.* **TODO** □

## 参考文献

- [nLab] nLab authors. *nLab*. –2024. URL: <https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>. (Cit. on p. 20.)
- [Ásg21] Dagur Ásgeirsson. “The Foundations of Condensed Mathematics”. Master’s thesis. Université de Paris, 2021. URL: <https://dagur.sites.ku.dk/files/2022/01/condensed-foundations.pdf>. (Cit. on pp. 2, 17.)
- [CS22] Dustin Clausen and Peter Scholze. *Condensed Mathematics and Complex Geometry*. 2022. URL: <https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf>. (Cit. on pp. 1, 2, 26.)
- [Lan22] Markus Land. *Lecture Course: Condensed Mathematics*. 2022. Lecture notes available at <https://www.markus-land.de/teaching/>. (Cit. on pp. 3, 12.)

- [Lin23] Jannek Link. “Profinite sets, extremally disconnected spaces and basics of condensed mathematics”. Bachelor’s thesis. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2023. URL: <https://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/abschlussarbeiten/link-bachelor-revised.pdf>. (Cit. on p. 3.)
- [Mai21] Catrin Mair. *Animated Condensed Sets and Their Homotopy Groups*. 2021. arXiv: [2105.07888](https://arxiv.org/abs/2105.07888) [math.AT]. (Cit. on p. 2.)
- [Nes17] Sergey Neshveyev. *Totally disconnected spaces*. 2017. URL: <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4500/h17/undervisningsmateriale/tds.pdf>. (Cit. on p. 3.)
- [Rie17] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Dover Publications, 2017. URL: <https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/Riehl-CTC.pdf>. (Cit. on p. 28.)
- [Sch19] Peter Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics (all results joint with Dustin Clausen)*. 2019. URL: <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf>. (Cit. on p. 2.)
- [Sch20] Peter Scholze. *Lectures on Analytic Geometry (all results joint with Dustin Clausen)*. 2020. URL: <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf>. (Cit. on p. 2.)
- [Stacks] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 2023. URL: <https://stacks.math.columbia.edu>. (Cit. on p. 16.)